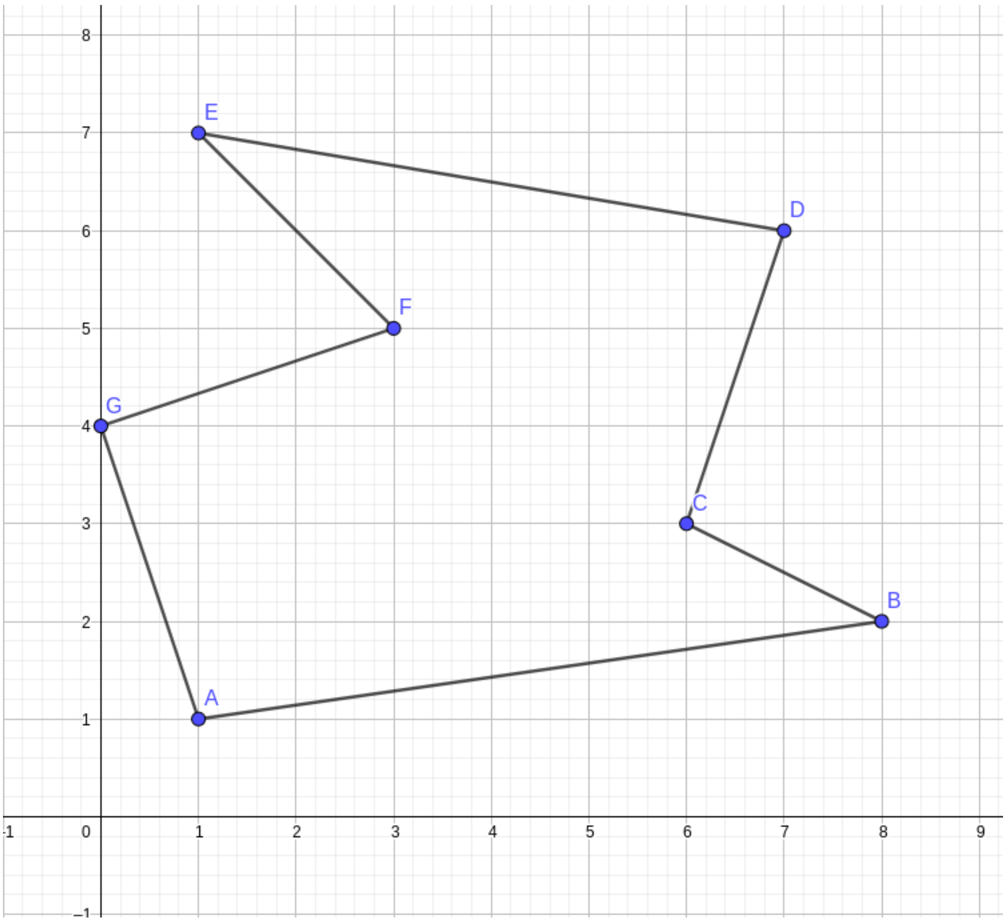
Pickov teorem

Nenad Duspara

1 Uvod

U nižim razredima osnovne škole ponekad se na raznim natjecanjima iz matematike pojavljuju zadaci vezani uz računanje površine geometrijskih likova. U slučaju susreta s ovakvim tipom zadatka, učenike najčešće učimo da je ispravan način pokušati podjeliti zadani lik na već poznate likove i onda računati površine manjih likova. Ukupna površina tada je najčešće zbroj površina manjih likova na koji smo podjelili početni lik.
Zanimljiv slučaj ovakvoga tipa zadatka je dan ispod na slici:



Slika 1: Poligon s cjelobrojnim točkama kao vrhovima

Potrebno je pronaći površinu lika na slici iznad. Mogli bismo najprije pokušati podjeliti zadani lik ponovno na pravokutnike, pravokutne trokute ili neke druge geometrijske likove čiju nam je površinu lako računati. Međutim, odrediti ovakvu podjelu lika u ovom slučaju nije tako jednostavno. Ipak, u nastavku rada pokazat ćemo da primjenom tzv. **Pickovog teorema** ovakav tip zadataka postaje jednostavan.

2 Pravokutna mreža s cjelobrojnim koordinatama. Pickov teorem.

Uočimo najprije nekoliko stvari. Teorem o kojemu ćemo raspraviti ima dva relativno jednostavna tehnička zahtjeva. Najprije, zadani lik nacrtan je u pravokutnoj mreži čiji su jedinični kvadrati površine jedan. Nadalje, vrhovi lika $ABCDEFG$ nalaze se u vrhovima kvadrata pravokutne mreže, drugim riječima *koordinate vrhova zadanog poligona su cjelobrojne*. Ukoliko su oba zahtjeva ostvarena, tada vrijedi teorem:

Teorem 2.1 (Pick) *Neka je zadan poligon u pravokutnoj mreži sa svojstvima kao gore. Nadalje neka je i broj cjelobrojnih točaka unutar poligona te neka je b broj cjelobrojnih točaka na rubu poligona (uključujući njegove vrhove). Tada je površina poligona dana sa:*

$$P = i + \frac{b}{2} - 1$$

Na primjeru gore, vidimo da za zadani poligon $i = 25$, $b = 8$ pa je površina zadanog lika:

$$P = 25 + \frac{8}{2} - 1 = 28$$

Slika poligona gore nacrtana je pomoću alata Geogebra, koji nam jednostavnom naredbom potvrđuje da je nacrtani poligon doista površine 28. Skicirajmo za kraj dokaz Pickovoga teorema. Napominjemo da je sam dokaz nešto složeniji za uzrast osnovne škole, no za tu razinu natjecanja dokazi nisu toliko ni bitni. Za srednje škole dokaz može biti dobra vježba.
Dokaz:
Dokaz se oslanja na korištenje Eurelove formule za poliedre. Reduciramo problem na slučaj trokuta koji ima tri vrha sa cjelobronim koordinatama i nema cjelobrojnih koordinata u unutrašnjosti. Takav trokut popločava ravninu pomoću vlastitih kopija. Naime, rotiramo li ga za $180°$ oko središta svake njegove stranice dobivamo spomenuto popločavanje ravnine. Ovako dobiveni trokuti su "dva puta gušći" nego cjelobrojne točke. (Svaka cjelobrojna točka pripada 6 trokuta, a svaki trokut ima samo tri cjelobrojne točke). Pickov teorem tada kaže da je površina svakog tako nastalih trokuta točno $\frac{1}{2}$ (nakon što ga dokažemo).
Svaki drugi jednostavni poligon može se podjeliti na trokute ovakvoga tipa. Ako poligon ima i unutrašnjih točaka, b točaka na rubu i površinu P tada možemo iskoristiti ove brojeve da prebrojimo vrhove, strane i stranice ovako dobivenog poligona. (Kako se nalazimo u ravnini, ovdje pod strane podrazumjevamo likove na koje smo podjelili orginalni poligon). Unutrašnje točke i točke na rubu su zapravo vrhovi novih likova nastalih gore opisanom subdivizijom. Dakle imamo ukupno $i + b$ vrhova. Strana poligona imamo $2P + 1$, naime dobili smo $2P$ trokutova površine $\frac{1}{2}$ kako bismo pokrili cijelu površinu poligoa i preostaje nam još jedna strana koja će se nalaziti izvan poligona. Konačno, svaki rub subdivizije poligona (svaka stranica subdivizije) dodiruje jedan ili eventualno dva trokuta. Kako je ukupno $6P$ strana trokuta i b stranica subdivizije koje diraju samo jedan trokut umjesto dva, ukupni broj strana je:

$$\frac{6P + b}{2}$$

Kako Eurelova formula uz standardne oznake daje:

$$V - E + F = 2$$

slijedi da:

$$(i+b) - \frac{6P+b}{2} + (2P+1) = 2$$

formula iz Pickovog teorema dobiva se izražavanjem P iz jednadžbe gore. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Izvor:

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Pick%27s_theorem#cite_note-az-2

[2] Aigner, Martin; Ziegler, Günter M. (2018). "Three applications of Euler's formula: Pick's theorem". Proofs from THE BOOK (6th ed.). Springer. pp. 93{94. doi:10.1007/978-3-662-57265-8. ISBN 978-3-662-57265-8.